Variational Torelli problem of zero varieties of sections of vector bundles

今野, 一宏

代数幾何学シンポジウム記録
1987年度　pp.17-36

Variational Torelli problem for varieties defined by sections of vector bundles

東北大理　今野　一宏

§0. 序

偏極多様体にそのコホモロジー群の持つ偏極Hodge構造を対応させる写像を周期写像という。この写像に関する最も基本的な問は

（ア）Global Torelli問題：周期写像は単射か？

であろう。しかし(ア)を解決する事は今のところ困難なので、かなり譲歩した形ではあるが

（イ）Generic Torelli問題：周期写像はその像の上に次数1？

をとりあえず考える。これに関しては infinitesimal variation of Hodge structure (IVHS) という有効な道具がある。実際、次のものに対するGeneric Torelli問題はIVHSを用いて肯定的に解決された：

(1)　射影空間の超曲面（[3], [5]）

(2)　擬射影空間の超曲面（[6], [10]）

(3)　標準直線束がampleな多様体の十分ampleな超曲面([7])

(4) 第2 Betti数が1のコムパクト単連結等質ケーラー多様体の超曲面([8],[11])

また、最近、寺杣氏によって

(5) 射影空間内の次数が全て等しい超曲面のcomplete intersections ([12])

に対しても肯定的であることが示された。これらに共通する方針はIVHSをJacobian ringという環の言葉で翻訳し、モジュライ空間のgenericな点に対して

(ウ) Variational Torelli問題：周期写像の微分のdataから、もとの多様体を再構成できるか？

を解くことに帰着させることである。

本稿ではampleベクトル束の大域切断の零点集合に対して(ウ)を考察する。例として射影空間内のcomplete intersectionsに対してGeneric Torelliを示す。これは上記(5)の拡張に相当する。我々の方法はコホモロジーの消滅条件が基本となるのでグラスマン多様体等のコンパクト型既約エルミート対称空間内のcomplete intersectionsに対しても同様の結果を得ることができるが、ここでは割愛する。尚、超曲面の時に最も強力な武器だったSymmetrizer Lemmaが我々の場合には適用できそうにない。新しい手段の出現が待たれる。

§1. IVHS と codifferential の iteration (復習)

IVHS の一般論は[2]等に譲ることにして、ここでは後に必要になる事柄を述べるに留める。まず、

<u>定義1.1.</u> $V=\{H_{\mathbf{Z}}, H^{p,q}, Q, T, \delta\}$ が weight n の IVHS であるとは、

(IVHS.1) $\{H_{\mathbf{Z}}, H^{p,q}, Q\}$ は weight n の偏極 Hodge 構造 i.e.,

(PHS.1) $H_{\mathbf{Z}}$ は有限生成自由アーベル群

(PHS.2) $H_{\mathbf{C}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{C}$ は次の様な直和分解を持つ

$$H_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \quad , \quad H^{q,p}=\overline{H^{p,q}}$$

(PHS.3) 双線型形式 $Q: H_{\mathbf{Z}}\times H_{\mathbf{Z}}\longrightarrow \mathbf{Z}$ は以下の条件を満す

1) $Q(\varphi,\psi)=(-1)^n Q(\psi,\varphi)$

2) $Q(\varphi,\psi)=0 \quad \text{for} \quad \varphi\in H^{p,q}, \psi\in H^{p',q'} \ (p'\neq q)$

3) $(\sqrt{-1})^{p-q}Q(\varphi,\overline{\varphi})>0 \quad , \quad 0\neq\varphi\in H^{p,q}$

(IVHS.2) T はベクトル空間で、線型写像

$$\delta: T\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

は、以下の条件を満たす

1) $\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)=\delta(\xi_2)\delta(\xi_1) \quad , \quad \xi_1,\xi_2\in T$

2) $Q(\delta(\xi)\varphi,\psi)+Q(\varphi,\delta(\xi)\psi)=0,$

$$\xi\in T, \quad \varphi\in H^{p,q}, \quad \psi\in H^{q+1,p-1}$$

我々の興味の対象は次の様な"幾何から生じるIVHS"である。

例 1.2. W ; d次元非特異射影代数多様体 / $\mathbb{C}$

ω : W上の ample 直線束の第1 Chern類

$H^n(W,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(W)$: Hodge 分解

$H^n_{prim}(W,\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}\{H^n(W,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup\,\omega^{d-n+1}} H^{2d+2-n}(W,\mathbb{Q})\}$

とすれば、

$$\begin{cases} H_{\mathbb{Z}} = H^n(W,\mathbb{Z}) \cap H^n_{prim}(W,\mathbb{Q}) \\ H^{p,q} = H^{p,q}(W) \cap H^n_{prim}(W,\mathbb{C}) \\ Q(\varphi,\psi) = (-1)^{n(n-1)/2} \int_W \varphi \wedge \psi \wedge \omega^{d-n} \end{cases}$$

は、weight n の偏極Hodge構造である。また、$\pi : \mathcal{W} \to S$ を $(W,\omega) = \pi^{-1}(0)$, $0 \in S$, なる偏極多様体の smooth family, $P : S \to \Gamma\backslash D$ を周期写像（ここに D は対応する周期領域、Γ は monodromy 群）とし P の（local lifting の）微分 P_* を考えると、次の様な可換図式が得られ $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}, Q, T_0(S), P_*\}$ は、weight n の IVHS を与える：

$$\begin{array}{ccc} T_0(S) & \xrightarrow{P_*} & T_{P(0)}(D) \\ {\scriptstyle 小平\text{-Spencer map} = \rho}\downarrow & \cap & \uparrow \\ H^1(W,T_W) & \xrightarrow[\text{induced by cup product}]{} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1}) \end{array}$$

さて、$\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}, Q, T, \delta\}$ を weight n の IVHS とすれば、$\xi_1, \cdots, \xi_n \in T$ に対して線型写像

$$\delta(\xi_1)\cdots\delta(\xi_n) : H^{n,0} \longrightarrow H^{0,n} \ (\cong H^{n,0*} \text{ by } Q)$$

が考えられるが、これは条件(IVHS.2)より $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に関して対称であり更に $Hom(H^{n,0}, H^{n,0*})$ の元としても対称であることが容易に確かめられる。従って我々は線型写像

$$\delta^n : Sym^n T \longrightarrow Hom^{(s)}(H^{n,0}, H^{n,0*}) \ (=\text{対称変換})$$

を得た。δ^n の双対写像 $\delta^{n*} : Sym^2 H^{n,0} \longrightarrow Sym^n T^*$ を n^{th} iterate of the codifferential δ^* と呼ぶ。特に、例1.2 において $d=n$ の場合を考えると上の構成法から次の図式が可換になることがわかる(詳細は[2]を見よ):

$$(\bigstar) \qquad \begin{array}{ccc} Sym^2 H^0(K_W) & \xrightarrow{\delta^{*n}} & Sym^n T^* \\ & \searrow^{\text{かけ算}=\nu} \quad \nearrow_{\mu = (\rho^n)^*} & \\ & H^0(K_W^2) = H^n(\wedge^n T_W)^* & \end{array} \qquad (T = T_0(S))$$

ここで、$Ker\,\nu = \{W$ の canonical image を通る quadrics$\}$ なる点に注意すれば、

1) ν が全射 , 2) μ が単射

3) W の canonical map が埋込みで、その像の ideal が quadrics で生成される

という都合の良すぎる3条件を仮定することにより、我々は W の定義イデアルを IVHS から取り出された情報 $Ker\,\delta^{*n}$ で回復できる。従って

1), 2), 3) $\Longrightarrow$ Variational Torelli

§2. 基本的な完全列

<u>設定</u>　X：n 次元非特異射影代数多様体/$\mathbb{C}$，$n \geq 4$.

E：X上の ample ベクトル束，rank $E = r$，$2 \leq r \leq n-2$.

$Y := \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$：Eに付随する射影空間束

L：tautological 直線束 s.t. $\pi_* L = E$

Z_σ：切断 $\sigma \in H^0(X, E)$ の零点集合，(非特異既約かつ $\mathrm{codim}_X Z_\sigma = r$ を仮定する)

$\tilde{Z}_\sigma$：同型 $H^0(X, E) \simeq H^0(Y, L)$ により σ に対応する切断 $\tilde{\sigma}$ の定める因子，(Z_σ が非特異故これも非特異)

ベクトル束Eに同伴する主束を P_E と書く。P_E の接束 T_{P_E} には P_E の構造群が作用するから、これによる商を Σ_E と書く。Σ_E はX上のベクトル束となり、更に次は完全。(cf. [1])

$$(1) \qquad 0 \to End(E) \longrightarrow \Sigma_E \longrightarrow T_X \longrightarrow 0$$

さて、Eの 1-jet 束 $J^1(E)$ は $\Sigma_E^* \otimes E$ の部分束だから σ の 1-jet 拡大 $j(\sigma) \in H^0(X, J^1(E)) \hookrightarrow H^0(X, Hom(\Sigma_E, E))$ は写像 $\cdot j(\sigma) : \Sigma_E \to E$ を定義するが、この核を $\Sigma_E\langle -Z_\sigma \rangle$ とおく。つまり、

$$(2) \qquad 0 \to \Sigma_E\langle -Z_\sigma \rangle \longrightarrow \Sigma_E \xrightarrow{\cdot j(\sigma)} E \longrightarrow 0$$

は完全。この時、$\cdot j(\sigma)$ を具体的に調べると次がわかる。

<u>補題 2.1.</u>　$0 \to Ker(E^* \otimes E \xrightarrow{\sigma} E) \to \Sigma_E\langle -Z_\sigma \rangle \longrightarrow T_X(-\log Z_\sigma) \longrightarrow 0$

は、完全列である。ここに $E^* \otimes E \xrightarrow{\sigma} E$ は evaluation map,
$T_X(-\log Z_\sigma) = \{\theta \in T_X ; \theta \cdot I_{Z_\sigma} \subset I_{Z_\sigma}\}$ (I_{Z_σ} は Z_σ の ideal)

L と $\tilde{\sigma}$ に対しても同様の考察を行なえば、2つの完全列

(3) $$0 \to \mathcal{O}_Y \to \Sigma_L \to T_Y \to 0$$

(4) $$0 \to T_Y(-\log \tilde{Z}_\sigma) \to \Sigma_L \xrightarrow{\cdot j(\tilde{\sigma})} L \to 0$$

が得られる。また、次も容易に証明できる。

<u>補題 2.2.</u> (a) $R^q \pi_* T_Y(-\log \tilde{Z}_\sigma) = \begin{cases} \Sigma_E\langle -Z_\sigma \rangle, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$

(b) $R^q \pi_* \Sigma_L = \begin{cases} \Sigma_E, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$

(c) X 上の任意のベクトル束 V に対し、次は可換

$$\begin{array}{ccc} H^0(Y, \Sigma_L \otimes \pi^* V) & \xrightarrow{\cdot j(\tilde{\sigma})} & H^0(Y, L \otimes \pi^* V) \\ \wr\!\uparrow & & \wr\!\uparrow \\ H^0(X, \Sigma_E \otimes V) & \xrightarrow{\cdot j(\sigma)} & H^0(X, E \otimes V) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} H^0(Y, \Sigma_L \otimes L^{-1} \otimes \pi^* V) & \xrightarrow{\cdot j(\tilde{\sigma})} & H^0(Y, \pi^* V) \\ \wr\!\| & & \wr\!\uparrow \\ H^0(X, E^* \otimes V) & \xrightarrow{\sigma} & H^0(X, V) \end{array}$$

<u>定義 2.3.</u> Y 上の任意のベクトル束 F に対して、(4) に $F \otimes L^{-1}$ をかけたものから得られる写像 $H^0(Y, \Sigma_L \otimes L^{-1} \otimes F) \xrightarrow{\cdot j(\tilde{\sigma})} H^0(Y, F)$ の像を J_F とおき pseudo Jacobian system と呼ぶ[7]。特に $F = L^a \otimes K_Y^b$ の時には、J_F の代りに $J_{(a,b)}$ と書く。また、
$R_{(a,b)} = H^0(Y, L^a \otimes K_Y^b) / J_{(a,b)}$ とおく。

この節の締めくくりとして補題2.2の適用例をひとつ述べる。我々は $\mathrm{codim}\, Z_\sigma = \mathrm{rank}\, E$ と仮定しているので

$$(5)\quad 0 \to \Lambda^r E^* \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{r-1} E^* \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} E^* \xrightarrow{\sigma} I_{Z_\sigma} \to 0$$

なるKoszul列は完全であることに注意する。

<u>命題2.4.</u> 次の条件が満足されれば $H^0(Z_\sigma, K_{Z_\sigma}^a) \cong R_{(ar,a)}$.

(i) $H^p(X, \Lambda^p E^* \otimes (K_X \otimes \det E)^a) = 0$, $1 \le p \le r$.

(ii) $H^{p-1}(X, \Lambda^p E^* \otimes (K_X \otimes \det E)^a) = 0$, $2 \le p \le r$.

<u>証明</u>: $(5) \otimes (K_X \otimes \det E)^a$ より、スペクトル系列

$$H^i(X, \Lambda^{j+1} E^* \otimes (K_X \otimes \det E)^a) \Longrightarrow H^{i-j}(X, I_{Z_\sigma} \otimes (K_X \otimes \det E)^a)$$

が得られるので(i)ならば $H^1(X, I_{Z_\sigma} \otimes (K_X \otimes \det E)^a) = 0$。同様にして(ii)ならば、$H^0(E^* \otimes (K_X \otimes \det E)^a) \xrightarrow{\sigma} H^0(I_{Z_\sigma} \otimes (K_X \otimes \det E)^a)$ は全射。よって、完全列

$$0 \to I_{Z_\sigma} \otimes (K_X \otimes \det E)^a \longrightarrow (K_X \otimes \det E)^a \longrightarrow K_{Z_\sigma}^a \longrightarrow 0$$

より、
$$\begin{aligned} H^0(K_{Z_\sigma}^a) &\simeq \mathrm{Coker}\{H^0(I_\sigma \otimes (K_X \otimes \det E)^a) \to H^0((K_X \otimes \det E)^a)\} \\ &= \mathrm{Coker}\{H^0(E^* \otimes (K_X \otimes \det E)^a) \xrightarrow{\sigma} H^0((K_X \otimes \det E)^a)\} \\ &\simeq R_{(ar,a)} \end{aligned}$$

が2.2.(c)の第2の図式及び $K_Y = L^{-r} \otimes \pi^*(K_X \otimes \det E)$ なる事実より従う。

§3. モジュライ空間，変形。

主束P_Eの、ファイバーを保つ自己同型全体のなす群$F(P_E)$は複素Lie群になる[9]。また，$\Pi_E : F(P_E) \longrightarrow Aut(X)$なる自然な準同型写像が存在するが、これは§2(1)と次の様に関係する：

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow H^0(X, End(E)) & \longrightarrow & H^0(X, \Sigma_E) & \longrightarrow & H^0(X, T_X) & \rightarrow \cdots \\
\wr\!\!\| & & \wr\!\!\| & & \wr\!\!\| & \\
Lie(Ker\,\Pi_E) & \longrightarrow & Lie\,F(P_E) & \longrightarrow & Lie\,Aut(X) &
\end{array}$$

群$F(P_E)$は$H^0(X, E)$にpull-backで作用する。$U \subset \mathbb{P}H^0(X, E)^*$を§2「設定」中の様な$Z_\sigma$をparametrizeする開集合とすれば$U$は明らかに$F(P_E)$-不変である。$\mathcal{M} = U/F(P_E)$とおく。

<u>注意3.1.</u> $F(P_E)$は必ずしもreductiveではないので$\mathcal{M}$自体に“良い構造”が入っているわけではないが、必要ならばUに含まれる$\mathbb{P}H^0(X, E)^*$のopen dense subset U_0をとることによって geometric quotient $\mathcal{M}_0 = U_0/F(P_E)$が存在し、かつsmoothになるようにできる(cf. [4])。また、$\mathcal{M}_0$上にはZ_σたちのfamilyがのっていると仮定してもかまわない。我々は周期写像のgenericな単射性を問題にしているので、この様な$\mathcal{M}_0$を考えれば十分なのである。以下、$\mathcal{M}$と$\mathcal{M}_0$は区　しない。

さて、$[\sigma]\in\mathcal{M}$ における $\mathcal{M}$ の接空間 $T_{[\sigma]}(\mathcal{M})$ を考えると、$F(P_E)$ の作用の仕方から、

$$
\begin{aligned}
T_{[\sigma]}(\mathcal{M}) &= \mathrm{Coker}\{H^0(X,\Sigma_E) \xrightarrow{\cdot j(\sigma)} H^0(X,E)\} \\
&\cong \mathrm{Coker}\{H^0(Y,\Sigma_L) \xrightarrow{\cdot j(\tilde{\sigma})} H^0(Y,L)\} \qquad (2.2.(c)) \\
&= R_{(1,0)}
\end{aligned}
$$

<u>補題 3.2.</u> 次の条件が満足されれば、小平-Spencer 写像 $\rho: T_{[\sigma]}(\mathcal{M}) \longrightarrow H^1(Z_\sigma, T_{Z_\sigma})$ は単射。

(i) $H^p(X, \Lambda^p E^* \otimes T_X) = 0 \quad , 1 \le p \le r$

(ii) $H^{p-1}(X, \Lambda^p E^* \otimes E) = 0 \quad , 2 \le p \le r$

<u>証明</u>： §2.(2), 2.1. と完全列 $0 \to T_X \otimes I_{Z_\sigma} \to T_X(-\log Z_\sigma) \to T_{Z_\sigma} \to 0$ より、次の図式が得られる。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \\
\cdots \to H^1(X, T_X \otimes I_{Z_\sigma}) & \longrightarrow & H^1(X, T_X(-\log Z_\sigma)) & \xrightarrow{\beta} & H^1(T_{Z_\sigma}) \to \cdots \\
 & & \uparrow \alpha & & \\
T_{[\sigma]}(\mathcal{M}) & \hookrightarrow & H^1(X, \Sigma_E\langle -Z_\sigma\rangle) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & H^1(X, \mathrm{Ker}(E^* \otimes E \xrightarrow{\sigma} E)) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & &
\end{array}
$$

ここで、2.4. の証明と同様に、(i) $\Rightarrow H^1(T_X \otimes I_{Z_\sigma}) = 0$ 及び (ii) $\Rightarrow H^1(\mathrm{Ker}(E^* \otimes E \to E)) = 0$ がわかるので、合成写像 $\beta\circ\alpha$ は単射である。

この補題の内容は次の様にとらえることもできる：

(ア) 次の図式を考える（r_1, r_2 は制限写像）

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(T_X) \arrow[d, "r_1"] & & \\
\cdots \arrow[r] & H^0(T_X \otimes \mathcal{O}_{Z_\sigma}) \arrow[r, "\cdot j(\sigma)|Z_\sigma"] & H^0(N_{Z_\sigma/X}) \arrow[r] & H^1(T_{Z_\sigma}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & H^0(X, E) \arrow[u, "r_2"] \arrow[ur, "\rho_U"'] & &
\end{tikzcd}$$

ρ_U ; U 上の family に対する K-S map

ここに、真中の列は $0 \to T_{Z_\sigma} \to T_X \otimes \mathcal{O}_{Z_\sigma} \to N_{Z_\sigma/X} \to 0$ より生じるもの。r_2 は *infinitesimal displacement map* に外ならない。3.2 の条件 $(i) \Rightarrow r_1$ は全射，$(ii) \Rightarrow Im\ r_2 \cong H^0(E)/\sigma H^0(E^* \otimes E)$ が言えるので ρ_U の像は $T_{[\sigma]}(\mathcal{M}) = \mathrm{Coker}\{H^0(\Sigma_E) \to H^0(E)\}$ と同型になる。

(イ) 2.2.(a) より $H^1(Y, T_Y(-\log \tilde{Z}_\sigma)) \simeq H^1(X, \Sigma_E\langle -Z_\sigma\rangle)$ だから対 $(Y, \tilde{Z}_\sigma)$ の変形の倉西族から引き起こされる対 (X, Z_σ) の変形が引き起こす Z_σ の変形が effectively parametrized であるための十分条件が (i) と (ii).

尚、堀川先生の正則写像の変形理論から、$\tilde{Z}_\sigma$ の任意の微小変形が対 (X, Z_σ) の変形を引き起こすことがわかる。証明は blow up の場合と同様。

§4. IVHS の記述

まず、$\tilde{Z}_\sigma$ と Z_σ の中間次元コホモロジー群の Hodge 構造を比較する。$\iota : Z_\sigma \hookrightarrow X$ を inclusion map とし、

$$H^{n-r}_{prim}(Z_\sigma, \mathbb{Q}) = \mathrm{Coker}\{H^{n-r}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^{n-r}(Z_\sigma, \mathbb{Q})\}$$

とおく。$H^{n+r-2}_{prim}(\tilde{Z}_\sigma, \mathbb{Q})$も同様に定義する。(注：こちらのほうはample直線束$L|_{\tilde{Z}_\sigma}$のChern類から定められる通常のprimitive partに等しい。)　この時、

<u>補題4.1</u>.　$H^{n-r}_{prim}(Z_\sigma, \mathbb{Q})(-r+1) \simeq H^{n+r-2}_{prim}(\tilde{Z}_\sigma, \mathbb{Q})$ as Hodge 構造

証明は、$\pi; Y \to X$, $\pi' = \pi|_{\tilde{Z}_\sigma}; \tilde{Z}_\sigma \to X$ から得られる２つのLeray spectral sequences

$$E_2^{i,j} = H^i(X, R^j\pi'_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^{i+j}(\tilde{Z}_\sigma, \mathbb{Q}),\ {}'E_2^{i,j} = H^i(X, R^j\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^{i+j}(Y, \mathbb{Q})$$

を考え、$\pi'^{-1}(x) = \mathbb{P}^{r-1}\ (x \in Z_\sigma)$, $\mathbb{P}^{r-2}\ (x \notin Z_\sigma)$　に注意して

$$H^{n-r}_{prim}(Z_\sigma) = E_2^{n-r, 2r-2}/{}'E_2^{n-r, 2r-2} \longrightarrow H^{n+r-2}_{prim}(\tilde{Z}_\sigma)$$

が同型であることを見ればよい。

次にPoincaré residue mapが引き起こす複体の完全列

$$0 \to \Omega^\bullet_Y \longrightarrow \Omega^\bullet_Y(\log \tilde{Z}_\sigma) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}_{\tilde{Z}_\sigma} \longrightarrow 0$$

を考える。Deligneの有名な結果より、スペクトル系列

$E_1^{p,q} = H^q(Y, \Omega^p_Y(\log \tilde{Z}_\sigma)) \Longrightarrow H^{p+q}(Y \setminus \tilde{Z}_\sigma, \mathbb{C})$ は E_1 で退化する。

よって、hypercohomologyの完全列はGysin sequenceと同一視される：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{H}^{n+r-1}(\Omega^\bullet_Y) & \to & \mathbb{H}^{n+r-1}(\Omega^\bullet_Y(\log \tilde{Z}_\sigma)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+r-1}(\Omega^{\bullet-1}_{\tilde{Z}_\sigma}) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+r}(\Omega^\bullet_Y) \to \\
\wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert \\
H^{n+r-1}(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^{n+r-1}(Y \setminus \tilde{Z}_\sigma) & \longrightarrow & H^{n+r-2}(\tilde{Z}_\sigma) & \longrightarrow & H^{n+r}(Y)
\end{array}$$

これは混合Hodge構造の完全列であり、更にi^*が零写像であることも示せるのでPoincaré双対律よりHodge構造の同型$H^{n+r-1}(Y \setminus \tilde{Z}_\sigma) \simeq H^{n+r-2}_{prim}(\tilde{Z}_\sigma)(-1)$が得られる。従って、

<u>命題4.2.</u> $H^{n-r}_{prim}(Z_\sigma)(-r) \simeq H^{n+r-2}_{prim}(\tilde{Z}_\sigma)(-1) \simeq H^{n+r-1}(Y \setminus \tilde{Z}_\sigma)$.

特に、$H^{n-p}_{prim}(\Omega^{p-r}_{Z_\sigma}) \simeq H^{n+r-1-p}_{prim}(\Omega^{p-1}_{\tilde{Z}_\sigma}) \simeq H^{n+r-1-p}(\Omega^p_Y(\log \tilde{Z}_\sigma))$.

さて、§2.(4)の双対列よりKoszul完全列

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \Omega^p_Y(\log \tilde{Z}_\sigma) \arrow[r] & \Lambda^{p+1}\Sigma^*_L \otimes L \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^{n+r-1}\Sigma^*_L \otimes L^{n+r-1-p} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr|"] & \Lambda^{n+r}\Sigma^*_L \otimes L^{n+r-p} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr|"] & 0 \\
& & & & \Sigma_L \otimes K_Y \otimes L^{n+r-1-p} \arrow[r, "j(\sigma)"] & K_Y \otimes L^{n+r-p} &
\end{tikzcd}$$

を構成できる。この時、

$$\begin{cases} E_1^{i,0} = H^i(\Omega^p_Y(\log \tilde{Z}_\sigma)), \\ E_1^{i,j} = H^i(\Lambda^{p+j}\Sigma^*_L \otimes L^j), \quad j > 0 \end{cases}$$

なる0に収束するスペクトル系列がある[7]から、

<u>補題4.3.</u> $H^{n+r-1-p}(\Omega^p_Y(\log \tilde{Z}_\sigma)) \simeq R_{(n+r-p,1)}$ if

(i) $H^{n+r-p-s}(\Lambda^{p+s}\Sigma^*_L \otimes L^s) = 0$, $1 \le s \le n+r-1-p$,

(ii) $H^{n+r-1-p-s}(\Lambda^{p+s}\Sigma^*_L \otimes L^s) = 0$, $1 \le s \le n+r-2-p$

この補題と§2(3)の双対列より得られる完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^{p+s}_Y \longrightarrow \Lambda^{p+s}\Sigma^*_L \longrightarrow \Omega^{p+s-1}_Y \longrightarrow 0$$

とから、次が従う。

<u>命題 4.4.</u> (i) $H^{n-p}_{prim}(\Omega^{p-r}_{Z_\sigma}) \cong R_{(n+r-p,1)}$ if

$(HC.1)_p$ $H^{n+r-p-s}(Y, \Omega^{p+s}_Y \otimes L^s) = 0$, $1 \leq s \leq n+r-1-p$,

$(HC.2)_p$ $H^{n+r-p-s}(Y, \Omega^{p+s-1}_Y \otimes L^s) = 0$, $1 \leq s \leq n+r-1-p$,

$(HC.3)_p$ $H^{n+r-1-p-s}(Y, \Omega^{p+s}_Y \otimes L^s) = 0$, $1 \leq s \leq n+r-2-p$

$(HC.4)_p$ $H^{n+r-1-p-s}(Y, \Omega^{p+s-1}_Y \otimes L^s) = 0$, $1 \leq s \leq n+r-2-p$

(ii) 補題 3.2 の条件及び $(HC.1)_\nu \sim (HC.4)_\nu$ が $\nu = p, p-1$ に対して成立していれば、

$$T \otimes H^{n-p}_{prim}(\Omega^{p-r}_{Z_\sigma}) \xrightarrow{cup} H^{n-p+1}_{prim}(\Omega^{p-r-1}_{Z_\sigma})$$

は、かけ算写像

$$R_{(1,0)} \times R_{(n+r-p,1)} \longrightarrow R_{(n+r+1-p,1)}$$

と同一視される。ここに $T \subset H^1(T_{Z_\sigma})$ は小平-Spencer 写像による $R_{(1,0)}$ の像。

<u>注意 4.5.</u> 仮定から L は ample なので $(HC.1)_p$ はいつでも成立する。(小平-中野消滅定理より)

§5. 双対定理

再び §2 (4) の双対列を用いることによって、Koszul 完全列

$$0 \to L^{-n-r} \to \Sigma^*_L \otimes L^{-n-r+1} \to \cdots \to \Lambda^{n+r-1}\Sigma^*_L \otimes L^{-1} \to \Lambda^{n+r}\Sigma^*_L \to 0$$

を構成できるが、これに $L^a \otimes K_Y^{b-1}$ をかけたものの両端の部分に関して

$$\mathrm{Ker}\{H^{n+r-1}(L^{a-n-r} \otimes K_Y^{b-1}) \to H^{n+r-1}(\Sigma_L^* \otimes L^{a-n-r+1} \otimes K_Y^{b-1})\}$$

$$\cong R^*_{(n+r-a,\,2-b)} \qquad (\text{by Serre duality}),$$

$$\mathrm{Coker}\{H^0(\Lambda^{n+r-1}\Sigma_L^* \otimes L^{a-1} \otimes K_Y^{b-1}) \to H^0(\Lambda^{n+r}\Sigma_L^* \otimes L^a \otimes K_Y^{b-1})\}$$

$$\cong R_{(a,b)} \qquad (\because \Lambda^{n+r}\Sigma_L^* = K_Y)$$

となることがわかり、従って写像 $R_{(a,b)} \to R^*_{(n+r-a,\,2-b)}$ があることに注意すれば、4.3 及び 4.4 と同様にして

<u>命題5.1.</u> ($R_{(\cdot,\cdot)}$ に対する双対定理) (cf. [7])

(i) 以下の条件が満たされれば、$R_{(a,b)} \to R^*_{(n+r-a,\,2-b)}$ は単射。

(DI.1) $H^{n+r-1-s}(\Omega_Y^s \otimes L^{a-n-r+s} \otimes K_Y^{b-1}) = 0, \quad 1 \le s \le n+r-2,$

(DI.2) $H^{n+r-1-s}(\Omega_Y^{s-1} \otimes L^{a-n-r+s} \otimes K_Y^{b-1}) = 0, \quad 1 \le s \le n+r-2.$

(ii) 以下の条件が満たされれば、$R_{(a,b)} \to R^*_{(n+r-a,\,2-b)}$ は全射。

(DS.1) $H^{n+r-s}(\Omega_Y^s \otimes L^{a-n-r+s} \otimes K_Y^{b-1}) = 0, \quad 2 \le s \le n+r-1$

(DS.2) $H^{n+r-s}(\Omega_Y^{s-1} \otimes L^{a-n-r+s} \otimes K_Y^{b-1}) = 0, \quad 2 \le s \le n+r-1$

さて、命題4.4 及び 5.1 の諸条件は Y 上のコホモロジーの言葉で書かれているので応用上見づらい。そこで、これらを X 上のコホモロジーで書き直す。そのための補題をいくつか用意する。V を X 上の任意のベクトル束とする。

補題 5.2.

$$H^q(Y, L^m \otimes \pi^* V) \simeq \begin{cases} H^q(X, S^m E \otimes V) & \text{if } m \geq 0 \\ 0 & \text{if } -r < m < 0 \\ H^{q-r+1}(X, S^{-m-r} E^* \otimes \det E^* \otimes V) & \text{if } m \leq -r \end{cases}$$

但し、$S^m E$ は m-th symmetric tensor of E.

補題 5.3. 次のどちらかが満足されれば $H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes L^m \otimes \pi^* V)$ は消滅する；

(i) $H^{q-j}(Y, \pi^*(\Omega_X^i \otimes \Lambda^{p-i-j} E \otimes V) \otimes L^{m-p+i+j}) = 0$ for

$\max(0, p+1-r) \leq i \leq \min(p, n)$, $0 \leq j \leq p-i$.

(ii) $H^{q+j-1}(Y, \pi^*(\Omega_X^i \otimes \Lambda^{p-i+j} E \otimes V) \otimes L^{m-p+i-j}) = 0$ for

$\max(0, p+1-r) \leq i \leq \min(p, n)$, $1 \leq j \leq r-p+i$.

証明には次の２つの完全列を使用する。

(1) $0 \to T_\pi \longrightarrow T_Y \longrightarrow \pi^* T_X \longrightarrow 0$ (T_π : bundle along the fibers of π)

(2) $0 \to \mathcal{O}_Y \longrightarrow \pi^* E^* \otimes L \longrightarrow T_\pi \longrightarrow 0$

まず(1)の双対列から Ω_Y^p の filtration $F^\cdot$ で

$$Gr_F^i(\Omega_Y^p) \cong \pi^* \Omega_X^i \otimes \Lambda^{p-i} T_\pi^*$$

なるものを作りスペクトル系列を使って $H^q(\Omega_Y^p \otimes L^m \otimes \pi^* V) = 0$ となる十分条件を求め、ついで(2)によって更に T_π^* を含まない形に直す。

§6. Generic Torelli for complete intersections

前節までの結果を用いて得られた例を紹介する。$X = \mathbb{P}^n$, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(d_i)$ とする。但し、d_i は全て2以上の整数。また次の記号を用いる。

$$d = \sum_{i=1}^{r} d_i \ , \quad d_{max} = \max_{1\le i\le r}(d_i) \ , \ d_{min} = \min_{1\le i\le r}(d_i) .$$

射影空間のコホモロジーに関しては、Bott の定理があるので諸条件を check するのは難しくない。まず、一般の complete intersections に対する結果を列記する。

<u>定理6.1.</u>

(i) 小平-Spencer 写像 $\rho ; R_{(1,0)} \longrightarrow H^1(T_{Z_\sigma})$ は単射。更に、Z_σ が K3 曲面でなければ全射。

(ii) $H^{n-p}_{prim}(Z_\sigma, \Omega^{p-r}_{Z_\sigma}) \simeq R_{(n+r-p,1)}$ for $r \le {}^\forall p \le n$.

(iii) 「n が奇数, $r=2$, $d_1 = d_2 = 2$」でなければ、

$$R_{(n+r,2)} \simeq \mathbb{C} \ (= R_{(0,0)})$$

(iv) (iii)と同じ仮定の下で、かけ算

$$R_{(n+r-p,1)} \times R_{(p,1)} \longrightarrow R_{(n+r,2)} \simeq \mathbb{C} \quad , r \le p \le n$$

は perfect pairing を与え、これは cup 積

$$Q : H^{n-p}_{prim}(\Omega^{p-r}_{Z_\sigma}) \otimes H^{p-r}_{prim}(\Omega^{n-p}_{Z_\sigma}) \to H^{n-r}(\Omega^{n-r}_{Z_\sigma}) = \mathbb{C}$$

と同一視される。

(v) $H^0(Z_\sigma, K^a_{Z_\sigma}) \simeq R_{(ar,a)} \quad , a \in \mathbb{Z}$.

従って，(iii) 中の例外を除けば，非特異 complete intersection Z_σ の IVHS のうち代数的な部分は全て $R_{(\,,\,)}$ で翻訳された。

以下，K_{Z_σ} が ample ($\Leftrightarrow d>n+1$) の場合に §1 の一般論を適用し Generic Torelli 問題を考察する。まず，§1 の図式 (★) は次の様になる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^2 R_{(r,1)} \arrow[r, "\delta^{*(n-r)}"] \arrow[d, "\nu"'] & \mathrm{Sym}^{n-r} R^*_{(1,0)} \\
R_{(2r,2)} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, "\mu"] & R^*_{(n-r,0)} \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

ここに，α は pairing $R_{(2r,2)}\times R_{(n-r,0)}\rightarrow R_{(n+r,2)}\simeq\mathbb{C}$ より得られる写像で，β はかけ算 $\mathrm{Sym}^{n-r}R_{(1,0)}\rightarrow R_{(n-r,0)}$ の双対写像。まず，明らかに，<u>ν は全射</u>。また，$\beta^*:\mathrm{Sym}^{n-r}R_{(1,0)}\rightarrow R_{(n-r,0)}$ の全射性が，$\mathrm{Sym}^{n-r}H^0(X,E)\rightarrow H^0(X,S^{n-r}E)$ の全射性より従うので，<u>β は単射</u>。更に，$2d-2n-2\geq d_{max}$ ならば，Z_σ の canonical map による像のイデアルは quadrics で生成される（注：ここの条件は $3d-3n-3>d_{max}$ でよい）。従って α が単射ならば，μ が単射となりうまくゆくが，一般にはそうならない。次定理 (ii) が α が単射になるための十分条件であるが $H^0(X,\Omega_X^{n-r}\otimes K_X\otimes\det E)$ が最も大きな障害になっている。(cf. 5.1)

<u>定理6.2.</u> 次の条件が満足されれば、n次元複素射影空間内の $(d_1, \cdots, d_r)$-型の complete intersections に対して Generic Torelli が成立する。$(2 \le r \le n-2)$

(i) $2d - 2n - 2 \ge d_{max}$

(ii) $d \le \begin{cases} 2n - r & \text{if } n-r\text{ ; even } \& \ d_{min} = 2 \\ 2n - r + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

<u>例6.3.</u> 上の定理の条件を満たす $d_1, \cdots, d_r$ を $n-r = 2, 3$ のとき書き上げる。

$n-r$	$(d_1, \cdots, d_r) \quad d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_r$
2	(4, 3)
3	(6, 3), (5, 4), (4, 4); (6, 2, 2), (5, 3, 2), (4, 4, 2), (4, 3, 3), (3, 3, 3); (5, 2, 2, 2), (4, 3, 2, 2); (4, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 2), (3, 3, 2, 2); (4, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2, 2)

<u>参考文献</u>

[1] M.F.Atiyah : Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181-207.

[2] J.Carlson, M.Green, P.A.Griffiths, J.Harris : infinitesimal variations of Hodge structures I, Compositio Math. 50 (1983), 109-205.

[3] J.Carlson, P.A.Griffiths : Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem, in Journées de Géométrie Algébrique d'Anger 1979, Sijthoff & Noordoff (1980), 51-76.

[4] D.Cox, R.Donagi, L.Tu : Variational Torelli implies generic Torelli, preprint.

[5] R.Donagi : Generic Torelli for projective hypersurfaces, Compositio Math. 50 (1983), 325-353.

[6] R.Donagi, L.Tu : Generic Torelli for weighted hypersurfaces, Math. Ann.

[7] M.Green : The period map for hypersurface sections of high degree of an arbitrary variety, Compositio Math. 55 (1985), 135-156.

[8] K.Konno : Generic Torelli theorem for hypersurfaces of certain compact homogeneous Kahler manifolds, preprint.

[9] A.Morimoto : Sur le groupe d'automorphismes d'un espace fibre principal analytique complexe, Nagoya Math. J. 13 (1958), 157-178.

[10] M.-H.Saito : Weak global Torelli theorem for certain weighted hypersurfaces, Duke Math. J. 53 (1986), 67-111.

[11] M.-H.Saito : Generic Torelli theorem for hypersurfaces in compact irreducible Hermitian symmetric spaces, preprint.

[12] T.Terasoma : Infinitesimal variation of Hodge structures and the weak global Torelli theorem for complete intersections, preprint.